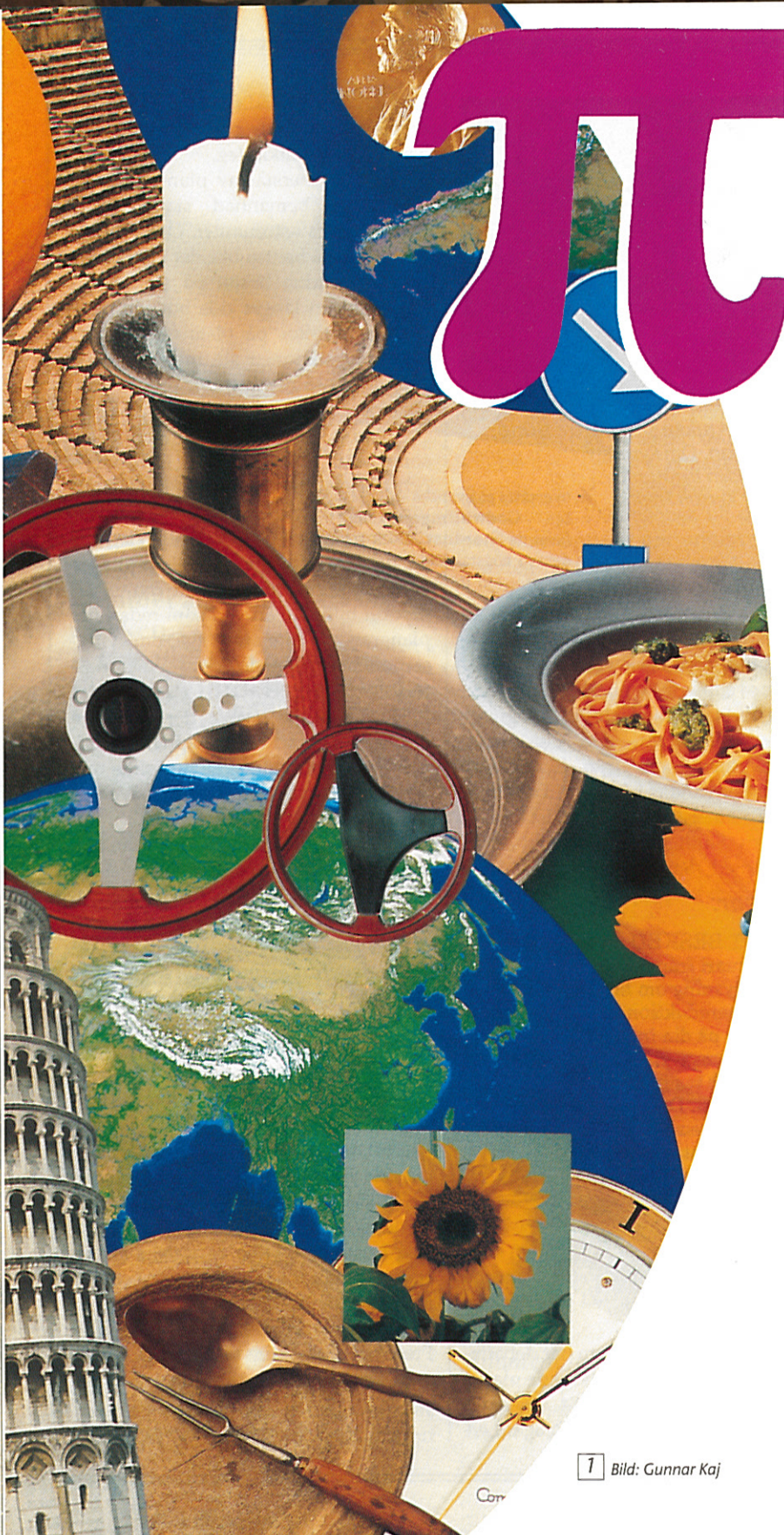




– ett bångstyrigt tal

Av BJÖRN GUSTAFSSON

Det mest berömda talet i världen är troligen 3,14. Ungefär så många gånger ryms cirkelns diameter i dess omkrets. Talet är så oumbärligt att det till och med har ett eget namn – π (pi).

Jordglob, bilratt eller tallrik. Vilket runt föremål du än väljer, är förhållandet mellan omkretsen och diametern alltid lika. Det verkar vara en av naturen vald konstant, som alltid har samma värde oberoende av hur stort föremålet är. Konstanten betecknas med den grekiska bokstaven π (pi).

I vanliga uppslagsböcker behandlas π på bara några rader. Då brukar det i allmänhet stå att π är irrationellt och transcendent (se rutan på sidan 19). Kort uttryckt innebär det att talet π aldrig kommer att kunna skrivas färdigt. Det finns inget slut på antalet decimalsiffror, och

vi finner inget mönster i den ordning som siffrorna kommer i.

Dyker upp överallt

När vi ska beräkna ytor och volymer på föremål där en cirkel är inblandad på ena eller andra sättet, behövs alltid π . Formerna kan variera. Det kan vara cylindrar, koner eller klot.

I fysiken är det vanligt att π dyker upp när man ska beskriva periodiska förlopp som pendelrörelser, vibrerande strängar eller växelström.

Inom matematiken förekommer π inte bara i samband med cirklar utan i alla upptänkliga och oupptänkliga sammanhang. Talet π dyker upp på många olika områden av matematiken som inte har några uppenbara samband.

Om de tidiga matematikerna i stället för att studera geometri, och därmed också cirklar, hade ägnat sig åt t ex sannolikhetslära eller vägrörelser skulle de ändå förr eller senare ha funnit att π är ett tal som vi inte kan vara utan.

Ett exempel på att π kan dyka upp i oväntade sammanhang är Buffons nålproblem (se rutan nedtill till höger).

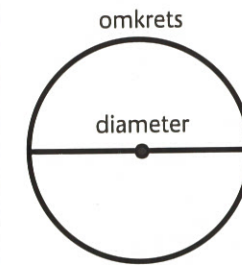
Bibelns förenklade värde

Han gjorde ock havet, i gjutet arbete. Det var tio alnar från den ena kanten till den andra, runt allt omkring, och fem alnar högt; och ett trettio alnar långt snöre mätte dess omfång.

Detta bibelcitat ur Första Konungaboken 7:23 beskriver ett stort kar av brons i Salomos tempel i Jerusalem. Det är runt och det har en omkrets på 30 alnar och en diameter på 10 alnar. (Det gamla längdmåttet aln motsvarar ungefär 60 centimeter.) Detta skulle alltså tyda på att hebreerna ansåg att talet π var 3.

Bibelns siffra är en av de tidigaste uppgifterna som anger ett värde på π . Nu för tiden vet vi att π har värdet 3,14159... där antalet decimaler fortsätter i oändlighet. Därför kommer vi aldrig att kunna skriva ner π , inte ens om vi hade ett papper stort som hela universum.

Det är märkligt att π , som finns i en så symmetrisk och enkel figur som en cir-



$$\pi = \frac{\text{OMKRETS}}{\text{DIAMETER}} \approx 3,14$$

kel, ger upphov till oändligt många decimaler. Om jag hade fått bestämma skulle det ha varit ett heltal.

Stängde in π

Egyptierna hade också ett eget värde på π . Det framgår av den s k Rhind-papyrusen från omkring 1650 f Kr (bild 3). Rhind-papyrusen har fått sitt namn av skotten Alexander Henry Rhind som köpte den år 1858 hittade papyrusen. Den kallas även för Ahmes papyrus efter den egyptiske skrivare som upptecknade den. Han anger att man ska multiplicera $\frac{8}{9}$ av en cirkels diameter med sig själv för att beräkna cirkelns yta. Med denna metod får man ett värde på π som är 3,16049...

2 π är förhållandet mellan omkretsen och diametern (två gånger radien) i en cirkel. Teckning: Gunnar Kaj

Buffons nålproblem

Antag att en plan yta är uppdelad av parallella linjer på avståndet a enheter från varandra (som golvplankorna på ett brädgolv). Kasta en nål, som är c enheter lång, på måfå på detta plan. c ska vara mindre än a . Hur stor är sannolikheten att nålen ska skära en av linjerna?

Svaret är $\frac{2c}{\pi a}$.

Vi kan alltså få fram ett "experimentellt" värde på π genom att kasta nålen ett stort antal gånger, N , och observera det antal gånger, m , som nålen skär en linje.

Vi får då $\pi = \frac{2cN}{am}$.

Detta liknar svart magi. Men problemet har ett samband med cirklar. Låt oss anta att nålens mitt hamnar på en punkt. Då kan dess ändrar hamna var som helst på en cirkel kring denna punkt. Alltså kommer cirkeln in i problemet – och med den π .

Detta problem uppställdes och löstes av den franske naturforskaren greve de Buffon, som publicerade resultatet år 1777. ■



Arkimedes, som levde på 200-talet f Kr, var inte bara sin tids främste matematiker utan också en av de största naturforskare som någonsin har levat. Hans bestämning av gränserna för π är med rätta berömd (bild 5). Han började med att rita en triangel inuti och en utanpå en cirkel med diametern 1 (en sådan cirkel har omkretsen π). Genom att beräkna omkretsen av de båda trianglarna har han "stängt in" värdet på cirkelns omkrets. Den kan inte vara större än det största värdet och samtidigt inte mindre än det minsta.

Sedan gick Arkimedes vidare från triangeln till sexhörningar, tolvhörningar osv, som han ritade inuti och utanpå cirkeln. Han fick hela tiden bättre värden på π . Han fortsatte ända tills månghörningen hade 96 sidor och kunde då visa att π är större än $3\frac{10}{71}$ och mindre än $3\frac{1}{7}$ (grekerna använde inte decimaler).

Även i Kina sysselsatte man sig med problemet. Astronomen Tsu Chùng Chih visade omkring år 480 att π ligger mellan 3,1415926 och 3,1415927. Han angav också kvoten $\frac{355}{113}$, som ger π med så många som sex korrekta decimaler. Dessa resultat upptäcktes inte i Europa förrän drygt tusen år senare. Att kvoten $\frac{355}{113}$ ger ett mycket bra värde på π förstår man eftersom man får ett ännu bättre värde först med så stora tal som i kvoten $\frac{104348}{33215}$.

Den förste matematiker som överträffade Tsus resultat var araben Al Kashi, som på 1400-talet beräknade π med sexton korrekta decimaler.

Tog med sig π i graven

Det dröjde ända till 1500-talet innan nya beräkningsmetoder för talet π hade utvecklats och resultaten förbättrades. Den s k trigonometrin och begrepp som

3 I Rhind-papyrusen anges egyptiernas värde på π . Skrivaren Ahmes kallade sin beräkning för Invigning till kunskapen om allt som finns. Foto: British Museum

Irrationella och transcendent tal

Om man delar två heltal med varandra får man antingen ett avslutat antal decimaler, t ex 4 dividerat med 5 ger 0,8, eller också slutar antalet decimaler aldrig. Oftast kan man då hitta ett mönster som upprepas i det oändliga (t ex är 2 dividerat med 7 lika med 0,285714 285714 ..., där alltså siffrorna 285714 ständigt upprepas i samma ordning). Men det går att konstruera tal där decimalutvecklingen inte slutar och där det inte finns något upprepat mönster i den. Antikens greker trodde att det inte var möjligt att sådana tal kunde

finnas. Så småningom kom de dock underfund med att roten ur 2 ($\sqrt{2}$, dvs det tal som multiplicerat med sig självt blir 2) är ett sådant tal.

Irrationella tal

Tal som $\sqrt{2}$ kallas irrationella, till skillnad från de rationella tal som kan skrivas som två heltal delade med varandra. Ordet rationell härstammar från det latinska ratio, som betyder kvot. Irrationell skulle alltså kunna översättas med "icke kvotbar". I en vanlig ordbok översätts irrationell med ologisk, vilket nog de greker som upptäckte de irrationel-

la talen skulle ha hållit med om. År 1761 bevisade matematikern Heinrich Lambert att π är irrationellt. Men, är π också ett transcendent tal? Svaret på den frågan kom inte förrän drygt hundra år senare.

Transcendent tal

De transcendent talen definieras som icke-algebraiska, dvs tal som inte kan vara lösningar till algebraiska ekvationer.

En algebraisk ekvation som

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$$

har två tal $x = \frac{1}{2}$ och $x = \frac{1}{3}$, som är dess lösningar.

Dessa båda lösningar är rationella tal. Men det finns tal som inte kan vara lösningar till vanliga algebraiska ekvationer med rationella tal som koefficienter ($1, -\frac{5}{6}$ och $\frac{1}{6}$ är koefficienter i ovanstående ekvation). Sådana tal kallas matematikerna transcendent. Man tyckte att talen "transcenderade", dvs över-skred, algebran. Därav namnet. Det är mycket svårt att bevisa att ett tal är transcendent, men år 1882 visade den tyske matematikern Ferdinand Lindemann att π är ett sådant tal. ■

oändliga serier och gränsvärden hade då kommit till. Fransmannen François Viète, den moderna algebras fader, skapade år 1592 för första gången en formel för π .

Fler och fler decimaler för värdet av π räknades fram under 1600-talet med t ex engelsmannen John Wallis formel från år 1665:

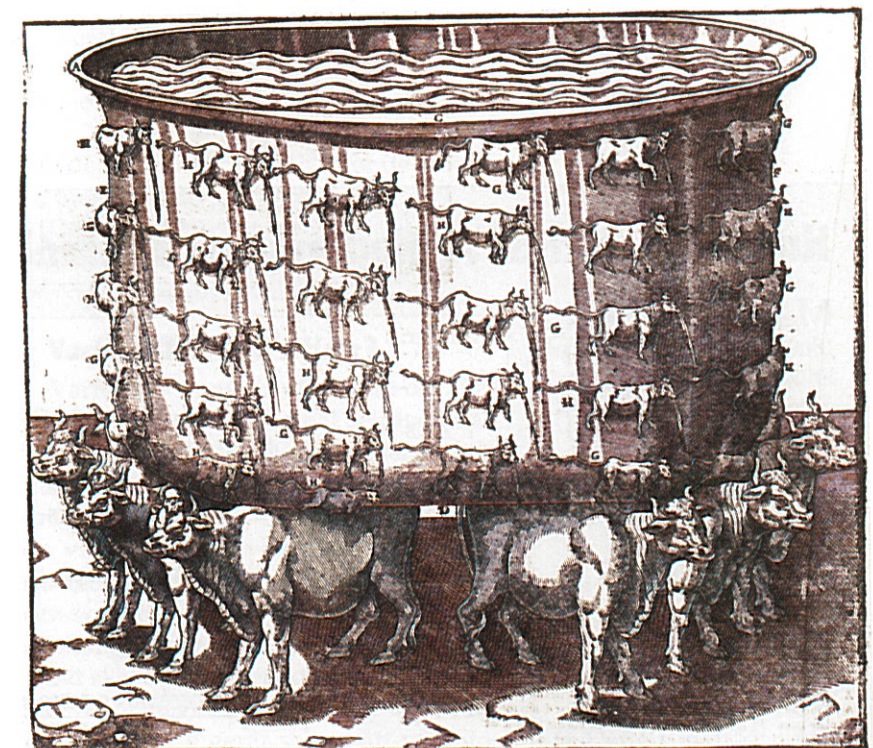
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots$$

eller tysken Gottfried Wilhelm Leibniz formel som kom knappt tjugo år senare:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Punkterna visar att beräkningen fortsätter i oändlighet och att man får bättre värden ju längre man håller på. Leibniz formel är enkel men ineffektiv, eftersom man måste ta med många hundra termer i formeln för att beräkna några få korrekta decimaler hos π .

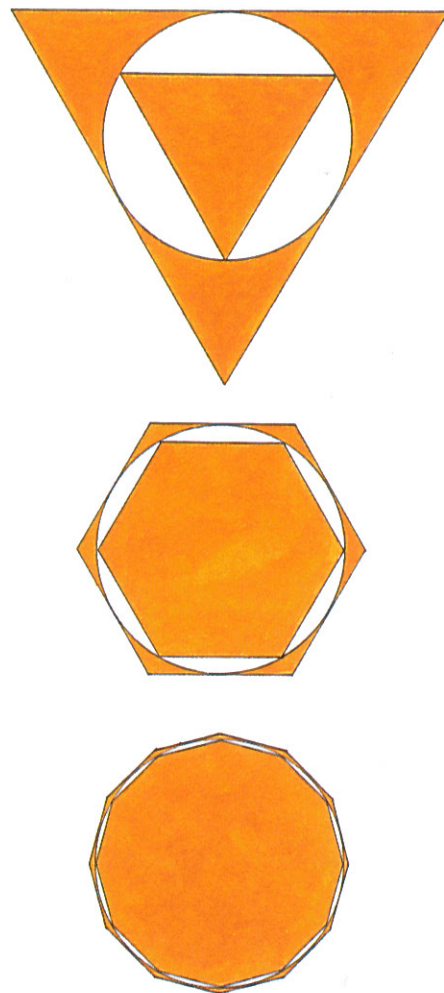
Under 1600-talet kallades talet 3,14159 ... för det ludolfska talet efter den tyske matematikern Ludolf van Ceu-



4 De bibliska värdet på π är 3, enligt en beräkning gjord utifrån detta kar i Salomos tempel i Jerusalem. Det runda karet anges ha en omkrets på trettio alnar och en diameter på tre alnar. Foto: Kungliga Biblioteket

5 Så räknade Arkimedes ut omkretsen av en cirkel för att få fram ett värde på π . Cirkelns omkrets är större än omkretsen på en månghörning som ritats inuti cirkeln och mindre än omkretsen på månghörningen som han ritade utanpå cirkeln. Arkimedes började med trianglar, fortsatte med sexhörningar, sedan tolvhörningar osv till månghörningar med 96 sidor. Då fick han ett värde på π som låg mellan $3\frac{10}{71}$ och $3\frac{1}{7}$.

Teckning: Gunnar Kaj



len. Han beräknade π med trettiofem decimaler. Arbetet tog nästan hela hans liv, och i gengäld fick Ludolf de sista tre decimalerna – 288 – inristade på sin gravsten. Tyskarna kallar fortfarande π för det ludolfiska talet.

I början på 1700-talet infördes den grekiska bokstaven π som symbol för talet. Symbolen blev allmänt populär först när den samtida berömda schweiziske matematikern Leonhard Euler också började använda den.

Räkna π för hand

Alla de gamla formlerna för π har den egenskapen att de ger bättre resultat ju längre man räknar. Men eftersom beräkningarna tidigare gjordes för hand var det svårt att beräkna fler än ett hundratal decimaler.

Den mest outtröttlige av alla π -beräknare är nog den engelske matematikern William Shanks. År 1853 publicerade han värdet på π med 607 decimaler! Tjugo år senare hade han lyckats beräkna 707 decimaler.

År 1945 tog saken en ny vändning. Med en mekanisk räknemaskin kontrollerades Shanks resultat, och han visade sig ha gjort fel i decimal nummer 528.

Hur du beräknar π med många decimaler

Metoden grundar sig på 1800-talsmatematikern Karl Friedrich Gauss studier av aritmetiska och geometriska medelvärden av två tal. Starta med att sätta:

$$A=1, X=1, B=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ och } C=\frac{1}{4}$$

Räkna därefter igenom följande slinga av formler där likhetstecknet inte betyder vad det brukar. I stället ska likhetstecknet, t ex i första raden, läsas "ge Y värdet av A". Börja därefter om, men använd de nya värden som

Formler:

$$A = Y$$

$$A = \frac{A+B}{2}$$

$$B = \sqrt{BY}$$

$$C = C - X(A - Y)^2$$

$$X = 2X \quad \text{resultat:}$$

$$\pi = \frac{(A+B)^2}{4C}$$

Beräkning:

$$Y = 1$$

$$A = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 0,853553390$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 1 = 0,840896415$$

$$C = \frac{1}{4} - 1 \times (0,853553390 - 1)^2 = 0,228553390$$

$$X = 2 \times 1 \quad \text{resultat:}$$

$$\pi = \frac{(0,853553390 + 0,840896415)^2}{4 \times 0,228553390}$$

$$\pi = 3,140579250...$$

har erhållits på A, X, B och C. Om du med en fickräknare går igenom slingan får du ett första värde på π . Efter två varv kommer du att ha ett värde på π med fem korrekta decimaler. Det fantastiska med denna metod är att antalet korrekta decimaler ungefär fördubblas efter varje nytt beräkningsvarv. Efter nitton varv har man alltså över en miljon korrekta siffror! Fast då räcker förstas fönstret på fickräknaren inte till. ■



6 Kanske är π ett perfekt tal i Guds ögon, säger bröderna Gregory och David Chudnovsky, världsberömda matematiker. Numera ägnar de sig helt åt att söka efter dolda mönster i den 2,16 miljarder långa siffraden i π , som de har räknat fram.

Teckning: Irena Roman, med tillstånd av The New Yorker

Många års arbete var bortkastat, eftersom även de följande decimalerna blev felaktiga.

Även tidigare hade man misstänkt att Shanks räknat fel på decimalerna, eftersom siffran 7 inte förekom så ofta som de andra siffrorna. Det korrigerade värdet på π återställde ordningen, och de saknade sjuorna kom fram.

Pengar att hämta

En av de klassiska frågorna, som grekiska matematiker sysselsatte sig med, var problemet med cirkelns kvadratur. Det innebär att man enbart med passare och linjal ska konstruera en kvadrat, vars yta är lika stor som ytan av en given cirkel. Problemet hänger intimt ihop med värdet på π , eftersom cirkelns yta beräknas med hjälp av π .

En mängd försök att lösa problemet gjordes mellan 1500- och 1700-talen. Intresset stimulerades av att det fanns pengar att hämta. Kejsar Karl V utlovade nämligen en hög belöning till den som kunde lösa problemet. Det går att visa att π inte får vara transcendent (se rutan på

sidan 19) om man ska klara detta. Men år 1882 bevisade den tyske matematikern Ferdinand Lindemann att π är just ett transcendent tal, och därmed dömdes alla cirkelkvadrerade till en tillvaro i matematikens kuriosakammare. Detta hindrar dock inte att nya förhoppningsfulla problemlösare dyker upp än i dag. Av den franska vetenskapsakademien får de ingen hjälp, för den beslutade redan år 1775 att icke vidare befatta sig med avhandlingar om cirkelns kvadratur.

Datorn träder in

År 1949 beräknade en på den tiden modern dator talet π med 2 037 decimaler på tre dagar. Drygt tio år senare växte π till 100 000 decimaler och efter ytterligare tio år fick π en miljon decimaler. Beräkningarna tog då något mindre än en dag. Om denna dator hade fortsatt att räkna skulle den i dag – efter tjugo år – ännu inte ha hunnit beräkna en miljard decimaler.

Genom utvecklingen av både datorer och matematiska metoder har man dock passerat den gränsen. Världsrekordet har de originella matematikerbröderna Gregory och David Chudnovsky från New York. Med hjälp av en egen metod har de fått fram 2,16 miljarder decimaler i π på sin hembyggda dator.

Den som själv vill pröva att räkna kan använda den effektiva metod som finns beskriven i rutan på sidan 20.

Varför alla dessa siffror?

Varför ska vi nu ha alla dessa decimaler? För praktiska ändamål behöver man inte så många. Med 39 decimaler i π kan man beräkna omkretsen av universum med ett fel som är mindre än radien av en väteatom (om vi kände den exakta diametern, vill säga). Det finns alltså andra skäl än rent praktiska för att beräkna de många decimalerna.

Ett skäl är att π -beräkningar i vissa fall har blivit något av ett standardtest för datorer. De fungerar som mått på datorernas förmåga att pålitligt och snabbt utföra komplicerade operationer. Ett annat skäl är förmodligen ren tävlingsin-

3,1415926535897932384626433832795...

7 Det finns ingen regel för i vilken ordning siffrorna i π kommer och siffraden tar inte slut. Detta är de 31 första decimalerna.

Teckning: Gunnar Kaj

5790
83982207105929841193817409297531

8 De 36 sista, kända siffrorna bland π s decimaler. Ingen vet vilken siffra som kommer efter den sista ettan.
Teckning: Gunnar Kaj

Med snöre, måttband och klocka

Om du har glömt värdet på π kan du med ett litet experiment bestämma det. Bind ett snöre, en till två meter långt, i en krok i taket. Knyt fast ett föremål i änden så att du får en pendel. Mät pendelns längd. Sätt igång pendeln och

starta med en ganska liten utslagsvinkel. Räkna antalet pendlingar. En pendling inkluderar både tur och returresa. Ta tid på svängningarna i sekunder och håll på i åtminstone en minut. Sätt därefter in värdena i följande formel:

$$\frac{t}{2n} \times \sqrt{\frac{g}{L}}$$

där $g = 9,81$, L = pendelns längd uttryckt i meter, t = tiden i sekunder och n = antalet svängningar. Om naturlagarna är med dig har du nu ett hyfsat värde på π . ■

stinkt; det är samma skäl som driver folk att bestiga höga berg.

Personligen hoppas jag att matematikerna också har litet av samma motiv som de gamla grekerna. De drev i allmänhet inte sina logiska resonemang för att tillämpa dem på praktiska problem, utan för att lära människor att tänka abstrakt. Platons filosofi, där man begrundade "det ideala och det sköna", var ofta en viktig drivfjäder i utvecklingen. Samma sak gällde i grekernas litteratur, skulptur och arkitektur.

Finns π på riktigt?

Antikens greker hade svårt att acceptera naturens lättsinne, som gav π en så ofullkomlig form och inte heltalets slutna gestalt. Men finns π i naturen eller är talet bara matematikernas uppfinning? Finns π oberoende om människan bryr sig om talet eller inte?

De flesta matematiker följer Platons lära och hävdar att π lever sitt eget självständiga liv. Enligt Platon och många efter honom är talet π lika verkligt som resten av världen. Matematikens stränga lagar finns utanför vårt medvetande, och människans uppgift är att upptäcka dem. Fast just π -talets gäckande gestalt är mycket svårfångad.

Att söka avsikten med π

Under 1900-talet har matematiker intresserat sig för om π är vad som kallas

ett normalt tal. Förenklat kan sägas att ett tal är normalt om alla siffror har lika stor sannolikhet att dyka upp när talets decimaler beräknas. När man ser decimalutvecklingen av π verkar alla siffror förekomma ungefär lika ofta. Men ingen har ännu kunnat bevisa detta.

Efter frågan om π är normalt kommer den svårare och mer djuplodande frågan om siffrorna i decimalutvecklingen kan sägas vara slumpmässigt fördelade. Hittills har decimaler i π motstått alla statistiska tester. Enligt bröderna Chudnovsky verkar de mer slumpmässiga än alla mänskliga slumpstatistabeller. Låt oss då utgå från att decimalerna i π är slumpmässiga och avsluta med följande exempel:

Låt varje ord och skiljetecken i svenska språket betecknas av ett särskilt tal, som inte innehåller nollor. Nollorna används för att skilja de olika kodtalen åt. I den oändliga rad av slumpmässiga decimaler i π måste det då finnas ett avsnitt som bildar texten till den artikel i Forskning och Framsteg som du just nu läser. Det är väl en underbar tanke! Dessutom finns naturligtvis all annan litteratur, skriven och oskriven, dold i den ändlösa sifferraden i π . ■

BJÖRN GUSTAFSSON är civilingenjör. Han arbetar med datafrågor på ABB Atom i Västerås.

Prostatacancer:

Kvinnligt könshormon används igen – utan att ge hjärtinfarkt

Av PETER HENRIKSSON

Män får östrogen för att motverka prostatacancer, kvinnor för att motverka klimakteriebesvär. Hormonet har gett många män hjärtinfarkt, men tycks hålla kvinnornas hjärtan och kärl friska. Nu förstår man varför och hoppas kunna hålla även männen hjärtfriska – trots östrogenbehandling.

1 Blodpropp på väg att bildas. Röda blodkroppar klumpar ihop sig till en propp i hjärtats egna blodkärl. En sådan propp är den vanligaste orsaken till hjärtinfarkt.
Foto: IBL

